Алгоритмы и структуры данных

Подготовка к контрольной работе №1



Практическое занятие **06**

2026–2027 учебный год

План

1. Инвариант циклического алгоритма
   как инструмент анализа корректности
2. Определения и свойства основных
   асимптотических нотаций — $\Omega, \omega, \Theta, o, O$
3. Рекуррентные соотношения — сложность
   алгоритмов «разделяй(уменьшай)-и-властвуй»
4. Случайный алгоритм — математическое
   ожидание сложности $T(n)$

Warm-Up

FAQ Бинарная куча и cb-сортировки

1. Является ли алгоритм QUICK SORT оптимальной сортировкой на основе сравнений [cb-сортировкой]?
2. Перечислите оптимальные cb-сортировки.
3. Какое главное свойство бинарной min-кучи?
4. Как обычно реализуют бинарную кучу на практике? Почему?
5. Является ли массив $[10, 20, 15, 30, 40]$ корректным представлением бинарной min-кучи?

Задача 1





Применение бинарной max-кучи

1. Какую структуру будет иметь бинарная max-куча, созданная на основании последовательности следующих элементов:

$$[19, 34, 23, 16, 54, 89, 24]$$

2. Какую структуру будет иметь полученная max-куча после выполнения двух шагов алгоритма HEAPSORT?

Повторение материала

FAQ Инвариант цикла

Что из себя представляет инвариант цикла?

INIT — инвариант верен до входа в цикл
начальные условия

MNT — инвариант верен во время каждой итерации цикла
промежуточные вычисления

TRM — инвариант верен при выходе из цикла
результат вычислений

Задача 2

Поиск и проверка инварианта цикла

```
1   algorithm(A, n)
2       B — массив для хранения n чисел
3       B[0] = A[0]
4
5       for i = 0 to n - 1
6           if A[i] > B[i - 1]
7               B[i] = A[i]
8           else
9               B[i] = B[i - 1]
10
11      return B[n - 1]
```

Что вычисляет этот алгоритм?

1. Сформулируйте условие P, которое подходит в качестве инварианта этого алгоритма для обработки массива A размера n.
2. Выполните проверку предложенного инварианта.

FAQ Асимптотический анализ

Чем точная функция $T(n)$ временной сложности отличается от ее асимптотической оценки?

- Если $T(n) = \Theta(f(n))$, то ...
- Если $T(n) = O(f(n))$, то ...
- Если $T(n) = o(f(n))$, то ...
- Если $T(n) = \Omega(f(n))$, то ...
- Если $T(n) = \omega(f(n))$, то ...

Задача 3



Асимптотические оценки в выражениях

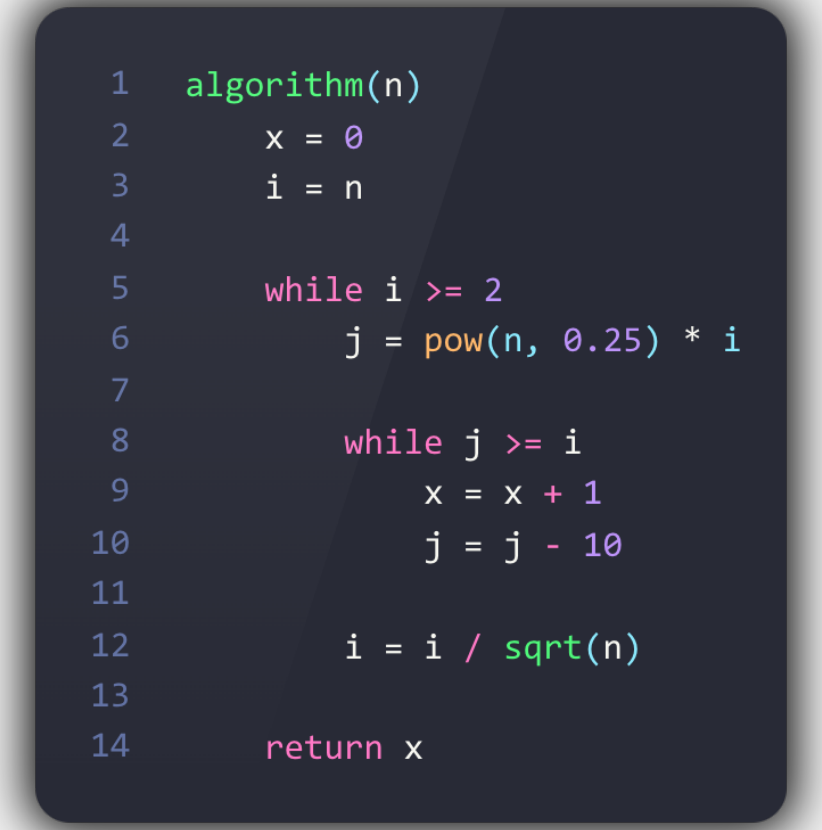
Подтвердите или опровергните истинность следующих равенств.

- $O(1) \cdot O(n^2) + \Theta(n) = O(n^3)$
- $O(1) \cdot O(1) \cdot \ldots \cdot O(1) + O(1) = O(1)$
- $\Theta(n^2) + O(n) = \Omega(n)$
- $\Theta(n^3 - n^2) = \Omega(n^3)$
- $n^2 + n \cdot \log_2 n - 4 = \Omega(n \cdot \log n)$

Если равенство ложно, исправьте его.

Задача 4

Сложность вложенных циклов



```
1   algorithm(n)
2       x = 0
3       i = n
4
5       while i >= 2
6           j = pow(n, 0.25) * i
7
8           while j >= i
9               x = x + 1
10              j = j - 10
11
12          i = i / sqrt(n)
13
14      return x
```

Определите асимптотически точную границу временной сложности этого алгоритма, на вход которого подается целое число $n \geq 2$.

FAQ Рекуррентные соотношения и МТ

$T(n) = a \cdot T(n-b) + O\left(n^k \cdot f(n)\right)$	УМЕНЬШАЙ-И-ВЛАСТВУЙ
$T(n) = a \cdot T\left({}^{n}/_{b}\right) + O\left(n^k \cdot f(n)\right)$	РАЗДЕЛЯЙ-И-ВЛАСТВУЙ
$T(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot T(b_i \cdot n) + g(n)$	ОБЩИЙ ВИД

- Определите ограничения применимости метода индукции.
- Определите ограничения применимости мастер-теорем.
- Что такое дерево рекурсии?

Задача 5



Сложность рекурсивного алгоритма

```
1   algorithm(A, n)
2       if n <= 20
3           return A[1]
4
5       j = 3
6       while j < n
7           A[j] = A[j - 1] + A[j]
8           j = j + sqrt(n)
9
10      y = algorithm(A, n - 3)
11
12      return y
```

1. Составьте рекуррентное соотношение, описывающее сложность данного алгоритма обработки массива $A[0..n]$.
2. Вычислите асимптотическую верхнюю границу сложности с помощью
   - дерева рекурсии
   - мастер–теоремы, если она применима

Задача 6



Стохастический BINARY SEARCH

Стандартный алгоритм бинарного поиска применяется для поиска в отсортированном массиве с помощью выбора правильной половины массива относительно его медианы.

Изменим алгоритм так, что будем выбирать часть массива не по медиане, а по случайному элементу исходного массива.

1. К какой категории случайных алгоритмов будет относиться измененный алгоритм — **Лас Вегас** или **Монте-Карло**?
2. Оцените математическое ожидание $E\big(T(n)\big)$ сложности измененного алгоритма, если случайный элемент выбирается равновероятно.

Резюме – о КР №1 **19 октября**

Продолжительность — **1 час 20 минут** (в **13:00** и в **14:40**)

- Блок **тестовых** вопросов — ~10 вопросов
  с вариантами ответов и/или кратким ответом
- Блок **задач** — 4 задачи на применение рассмотренных методов

Можно использовать — письменный/печатный конспект
с формулировками мастер-теорем и определениями